

Έκτο διαγώνισμα στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 60 Λεπτά

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

Θέμα 1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις (με αιτιολόγηση) ως αληθείς ή ψευδείς.

- (i) Αν $S = \{y_1, y_2\}$ ένα βασικό σύνολο λύσεων μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης, τότε το σύνολο $\hat{S} = \{ky_1 + my_2, ky_1 - my_2\}$ με $km \neq 0$ είναι επίσης βασικό σύνολο λύσεων της ίδιας διαφορικής εξίσωσης.
- (ii) Για τυχαία ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξης με διάστημα ορισμού I , υπάρχουν σύνολα λύσεων S_1, S_2 των οποίων οι συναρτήσεις Wronski W_{S_1} και W_{S_2} , αντίστοιχα, να ταυτίζονται σε ακριβώς n σημεία στο I .

Θέμα 2

Δίνεται το σύνολο συναρτήσεων

$$S = \{f_k(x) = x^k : x \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, N\},$$

όπου N το έτος γέννησης σας.

- (i) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f_k, k = 1, 2, \dots, N$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- (ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση η οποία να έχει το S βασικό σύνολο λύσεων.
- (iii) Για την εξίσωση $y^{(N+1)}(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ εξετάστε την αλήθεια των προτάσεων:
- (a) Υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων S_{N+1} της παραπάνω εξίσωσης τέτοιο, ώστε $S \subset S_{N+1}$.
- (b) Για κάθε $c \in \mathbb{R}$, υπάρχει λύση y της παραπάνω εξίσωσης τέτοια, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x^N} = c$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ